

Karl-Heinz Schimmelpfennig*, Norbert Hebing**

Der eindimensionale nicht

plastische Stoß

Erweitertes Band-Schnitt-Verfahren

1 Einleitung

In [1] wurde ein Verfahren zur grafischen Lösung von eindimensionalen plastischen Stößen vorgestellt. Im folgenden wird dieses Verfahren in zweierlei Hinsicht erweitert:

- Es sollen auch nicht plastische Stöße berechnet werden können.
- Die Berechnung der Geraden soll vereinfacht werden.

2 Theorie

Bei einem eindimensionalen Stoß beträgt der Kollisionswinkel 0 bzw. 180°. Der Stoß soll zentrisch erfolgen, so daß keine Drehbewegungen auf die Stoßpartner übertragen werden.

Die Berechnung der Kollisionsgeschwindigkeiten v_1 und v_2 erfolgen mit Hilfe des Impuls- und des Energie-Satzes:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - v_1'^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - v_2'^2)$$

Es stehen somit zwei Gleichungen für die Berechnung der zwei unbekannten Größen zur Verfügung. Dazu müssen aber drei Größen bestimmt werden, nämlich die Geschwindigkeiten der Fahrzeuge nach dem Stoß v_1' und v_2' und die Deformationsenergie ΔE . Man benötigt somit drei Größen, um zwei Unbekannte zu bestimmen. Andererseits ist der Stoß bei Vorgabe der Kollisionsgeschwindigkeiten vollkommen determiniert. Es muß daher eine weitere Größe existieren, die den Stoß beschreibt. Diese Größe, die den Stoß charakterisiert, wurde erstmals von Newton eingeführt und wird Stoßfaktor bzw. k-Faktor genannt. Der Stoßfaktor ist dimensionslos und kann durch folgende Formel definiert werden:

$$K = - \frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$$

Es läßt sich zeigen, daß der k-Faktor für einen Stoß, bei dem die Bewegungsenergie verringert wird, Werte zwischen -1 und +1 annehmen kann. Mit $k = 0$ wird ein plastischer Stoß beschrieben.

Unter Berücksichtigung der Definition für den k-Faktor lassen sich Energie- und Impuls-Satz umschreiben. Es ergeben sich folgende drei Gleichungen:

$$v_1 = - \frac{1+K}{m_v - K} \cdot v_2 + \frac{m_v + 1}{m_v - K} \cdot v_1' \quad (1)$$

*Dipl.-Ing. (TU) Karl-Heinz Schimmelpfennig, öffentlich bestellter und vereidigter Sachverständiger für Straßenverkehrsunfälle

**Dipl.-Phys. Norbert Hebing, Mitarbeiter im Ing.-Büro Schimmelpfennig und Becke, Im Bilskamp 2f, 4400 Münster-Wolbeck

$$v_1 = - \frac{1 - m_v \cdot K}{m_v(1+K)} \cdot v_2 + \frac{m_v + 1}{m_v(1+K)} \cdot v_2' \quad (2)$$

$$v_1 = v_2 \pm \sqrt{\frac{2 \Delta E}{1 - K^2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}} \quad (3)$$

mit dem Massenverhältnis

$$m_v = \frac{m_1}{m_2}$$

Für $k = 0$ ist die Gleichung (1) äquivalent zu Gleichung (2) und entspricht Gleichung (2) aus [1].

3 Darstellung in einem v_1/v_2 -Diagramm

Die aufgeführten Gleichungen lassen sich in einem v_1/v_2 -Diagramm als Geraden darstellen. Üblicherweise wird die Lage einer Geraden in der Ebene bestimmt durch den Punkt A, das ist der Schnittpunkt der Geraden mit der Y-Achse und der Steigung, dies ist der Tangens des Winkels zwischen der Geraden und der X-Achse.

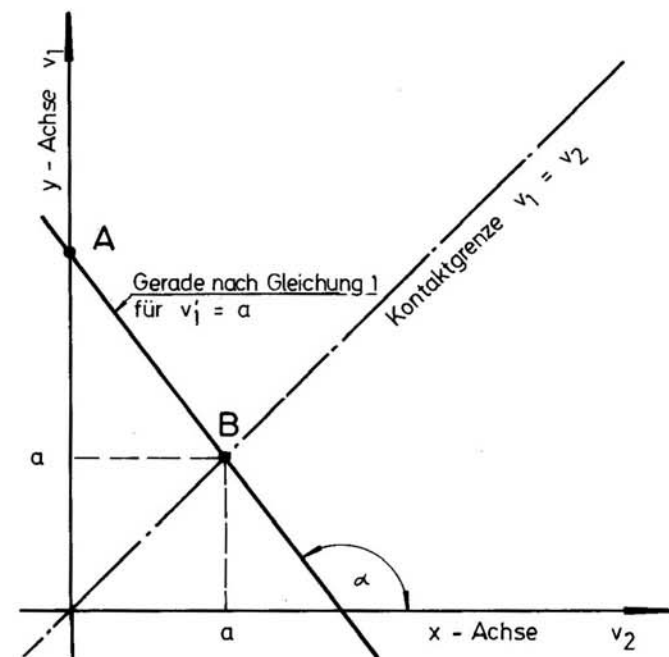


Bild 1 Prinzipdarstellung der Impulsgeraden im v_1/v_2 -Diagramm

Im vorliegenden Fall ist es günstiger, nicht den Punkt A, sondern den Punkt B, dies ist der Schnittpunkt der Geraden mit der Kontaktgrenze, zu berechnen. Auf der Kontaktgrenze ist $Y = X$ bzw. $v_1 = v_2$. Es läßt sich nämlich zeigen, daß die Geraden nach Gleichung (1) und (2) unabhängig von den Massen m_1 und m_2 und unabhängig von der Stoßcharakteristik durch den Punkt $(x = v_1'; y = v_1')$ bzw. $(x = v_2'; y = v_2')$ gehen. Dies läßt sich mathematisch durch Umformen der Gleichungen zeigen, bzw. durch folgende plausible Erklärung beweisen. Haben beide Fahrzeuge die gleiche Geschwindigkeit und fahren in die gleiche Richtung, also $v_1 = v_2$, so läßt es sich vorstellen, daß zwischen den beiden Fahrzeugen ein »Stoß« erfolgt, bei dem keine Kräfte und damit keine Impulse ausgetauscht werden. Die Geschwindigkeit nach dem Stoß ist gleich der Geschwindigkeit vor dem Stoß. Die Gerade, die den Zusammenhang zwischen den Kollisionsgeschwindigkeiten für eine ganz bestimmte Geschwindigkeit nach dem Stoß eines Fahrzeuges angibt, muß somit zwangsläufig durch den entsprechenden Punkt auf der Kontaktgrenze laufen.

Ein Fixpunkt der Geraden läßt sich somit ohne Berechnung be-

stimmen. Es kommt nun darauf an, die Steigung der Geraden zu ermitteln. Um auch hier Berechnungen einzusparen, wurden zwei Schablonen entwickelt. Schablone 1 (**Bild 2**) gilt für die Steigung gemäß Gleichung (1) und Schablone 2 (**Bild 3**) gilt für die Steigung gemäß Gleichung (2). Die Steigungen der Geraden hängen ab von dem Massenverhältnis und dem k-Faktor. Auf den Schablonen befinden sich somit Linien gleicher Massenverhältnisse und gleichem k-Faktor. Das Massenverhältnis variiert zwischen 0 und 1. Das leichtere Fahrzeug erhält die Nummer 1. Würde man diese Festlegung nicht treffen, so würden die Schablonen zu groß werden, da dann auch Massenverhältnisse > 1 mitberücksichtigt werden müßten. Die abgebildeten Schablonen kann man sehr leicht in beliebiger Größe erstellen. Die wichtigsten Größen sind angegeben. Sie sind dimensionslos und müssen zum Zeichnen der Schablonen mit einem Maßstab versehen werden. Eine vernünftige

Größe der Schablone ergibt sich z.B. dann, wenn eine Einheit 6 cm entspricht.

Die Berechnung der Energiegeraden geschieht nach der Methode, die schon in [1] vorgestellt worden ist. Die Geraden haben stets eine Steigung von +1. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der X- bzw. Y-Achse ergibt sich aus der Relativgeschwindigkeit

$$\Delta v = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta E}{1 - K^2} \cdot \frac{1}{m^*}}$$

mit der relativen Masse

$$m^* = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

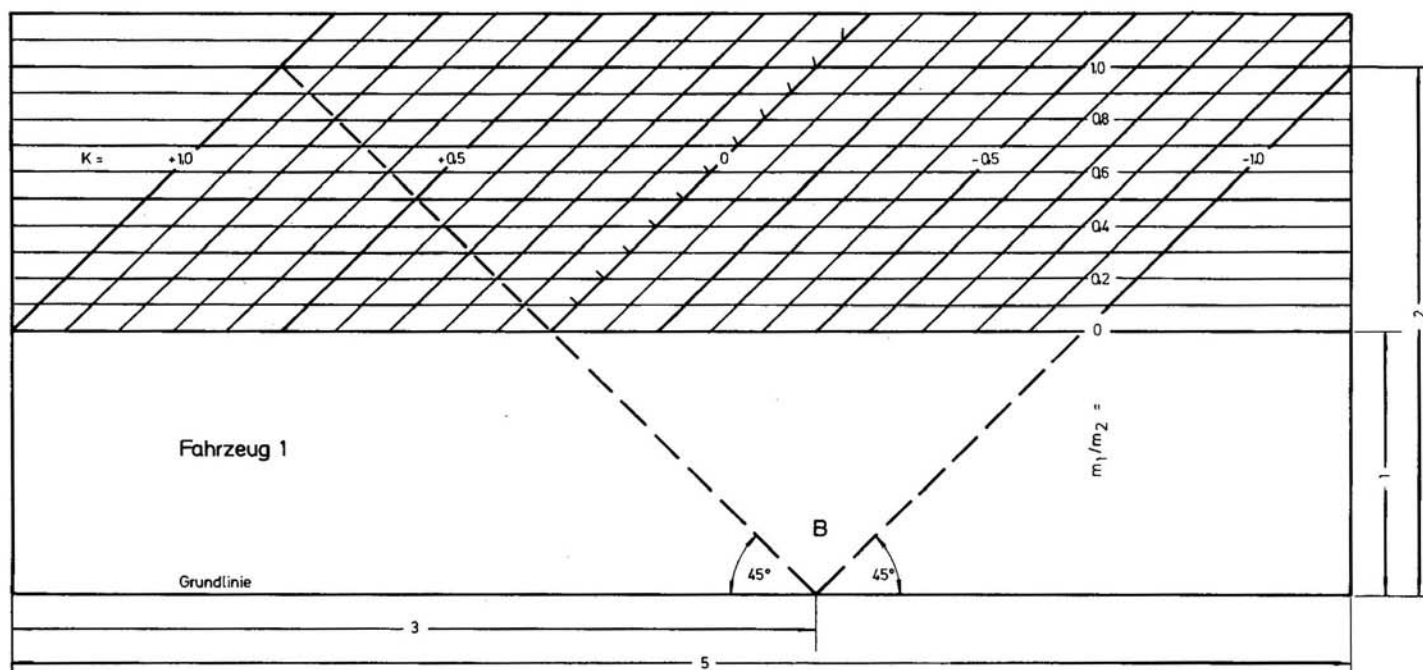


Bild 2 Schablone zur Ermittlung der Geradensteigung

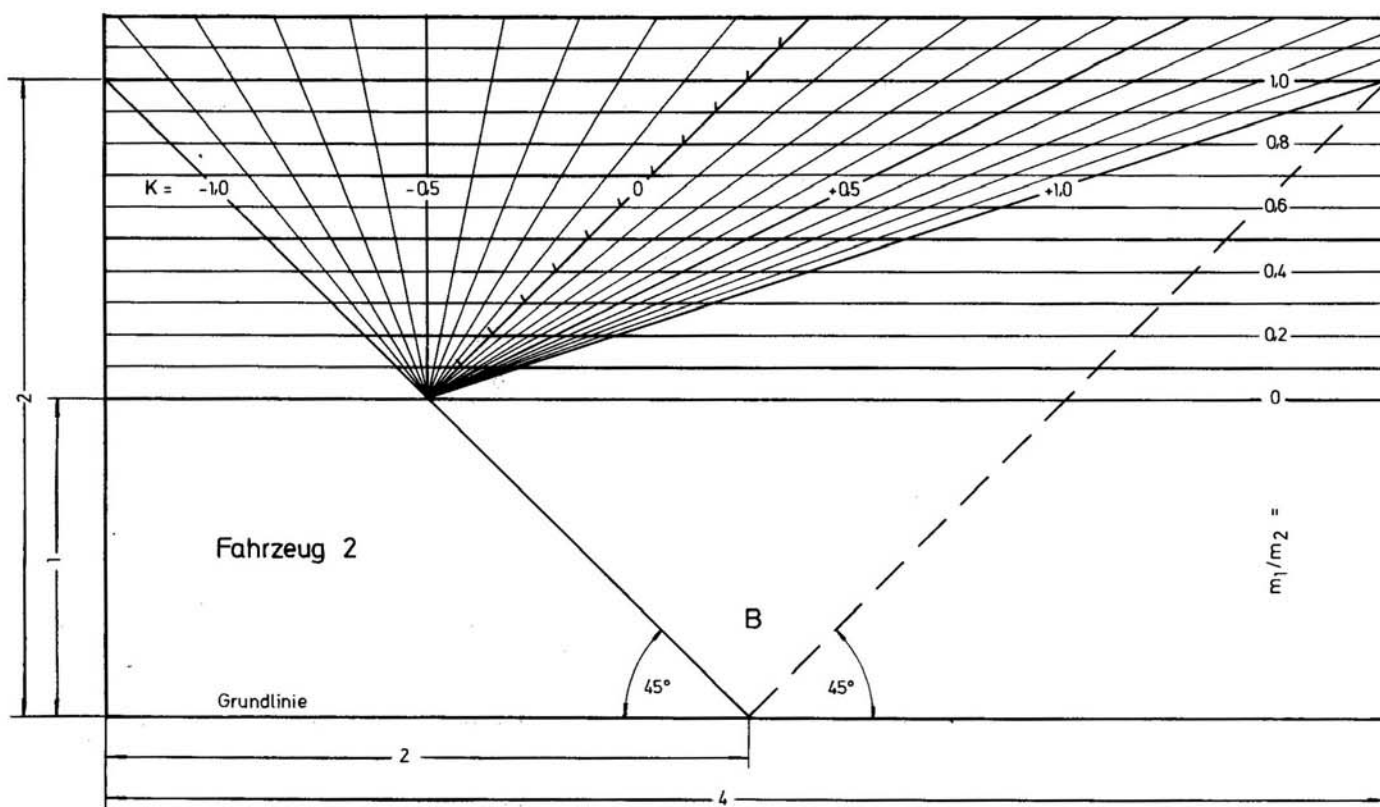


Bild 3 Schablone zur Ermittlung der Geradensteigung

4 Anwendungsbeispiel

Die Anwendung der Schablonen soll an einem konstruierten Beispiel verdeutlicht werden. Die zugrundegelegten Daten wurden in Bild 4 zusammengefaßt.



m_1	=	720 kg
m_2	=	1200 kg
m_v	=	0,6
m^*	=	450 kg
k	=	0,2
ΔE	=	$21600 \pm 4300 \text{ Nm}$
v_1'	=	$4 \pm 1 \text{ m/s}$
v_2'	=	$6 \pm 1 \text{ m/s}$

Bild 4 Daten zum Beispiel

Zunächst aber muß ein v_1/v_2 -Diagramm gezeichnet werden. In Bild 5 ist ein Diagramm gezeichnet, das alle denkbaren Fälle erfassen kann. Die Bewegungsrichtung von Fahrzeug 1 vor der Kollision gibt die positive Richtung wieder. Die Achseinteilung für die X- und Y-Achse kann beliebig erfolgen und zwar sowohl in m/s als auch in km/h. Es muß nur gewährleistet sein, daß beide Achsen den gleichen Maßstab haben.

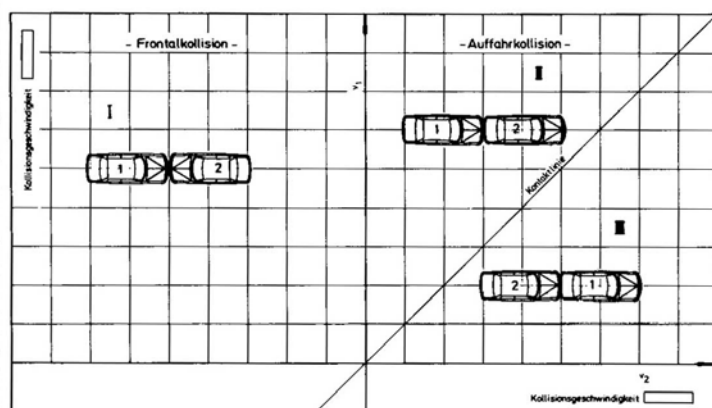


Bild 5 Feldeinteilung im v_1/v_2 -Diagramm

Es sind drei Bereiche zu unterscheiden:

- Frontalkollision
- Auffahrkollision, Fahrzeug 1 fährt auf Fahrzeug 2 auf.
- Auffahrkollision, Fahrzeug 2 fährt auf Fahrzeug 1 auf.

Bild 6 beschreibt die Ermittlung der Geraden gemäß Gleichung (1).

- Der Fußpunkt B kommt auf dem Punkt der Kontaktlinie zu liegen, der der Geschwindigkeit von Fahrzeug 1 nach der Kollision entspricht.
- Der Schnittpunkt der Linien für $m_v = 0,6$ und $k = 0,2$ kommt ebenfalls auf der Kontaktlinie zu liegen.
- Die Grundlinie der Schablone gibt nun die Gerade wieder, die die lineare Abhängigkeit zwischen den Kollisionsgeschwindigkeiten gemäß Gleichung (1) beschreibt.

Für Fahrzeug 2 wird entsprechend vorgegangen.

Der Schnittpunkt beider Geraden ist die gesuchte Lösung. $v_1 = 11,5 \text{ m/s}$ und $v_2 = 1,5 \text{ m/s}$.

Weiterhin kann die Energiegerade eingezeichnet werden. Nach Gleichung (3) ergibt sich eine Differenzgeschwindigkeit von 10 m/s . Dies ergibt eine Energiegerade entsprechend Bild 8.

Für den Fall III ergibt sich eine Lösung im Bereich III, dementspre-

chend muß auch die Energiegerade so eingezeichnet werden, wie sie in Bild 8 strichpunktiert dargestellt worden ist. Die Differenzgeschwindigkeit wird in diesem Fall nicht auf der Y-Achse, sondern auf der X-Achse abgetragen.

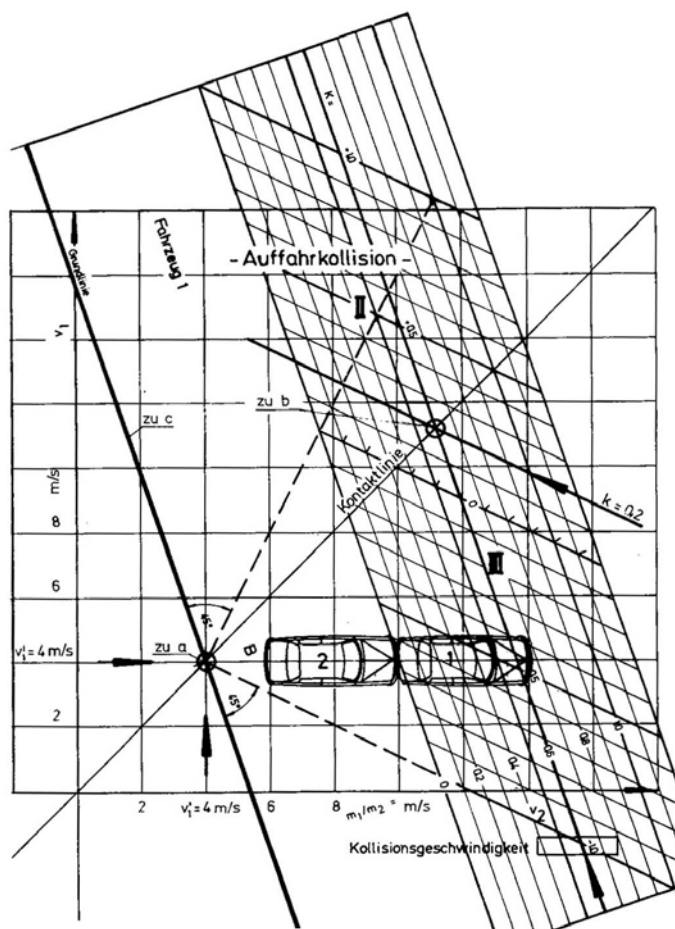


Bild 6 Schablonenanwendung

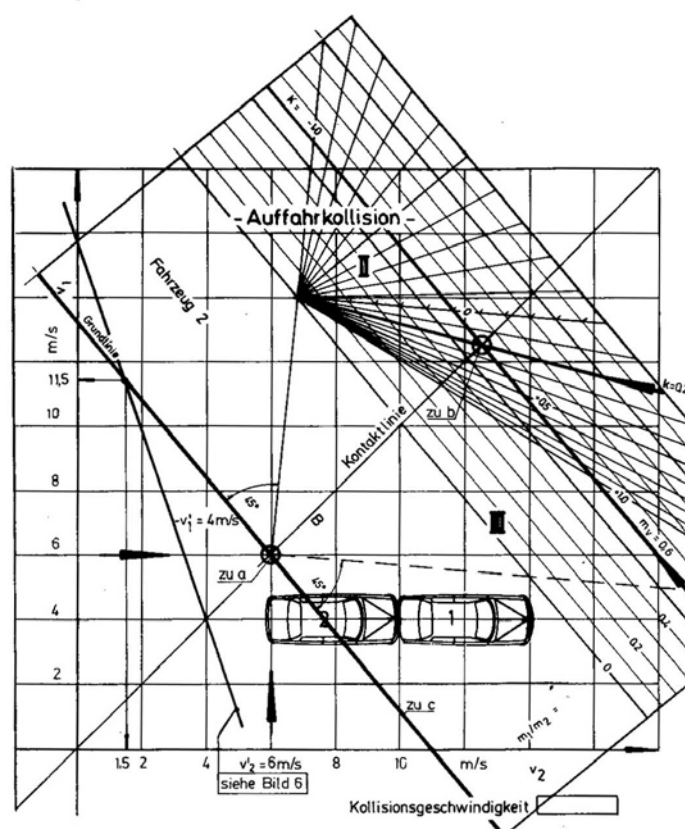


Bild 7 Schablonenanwendung

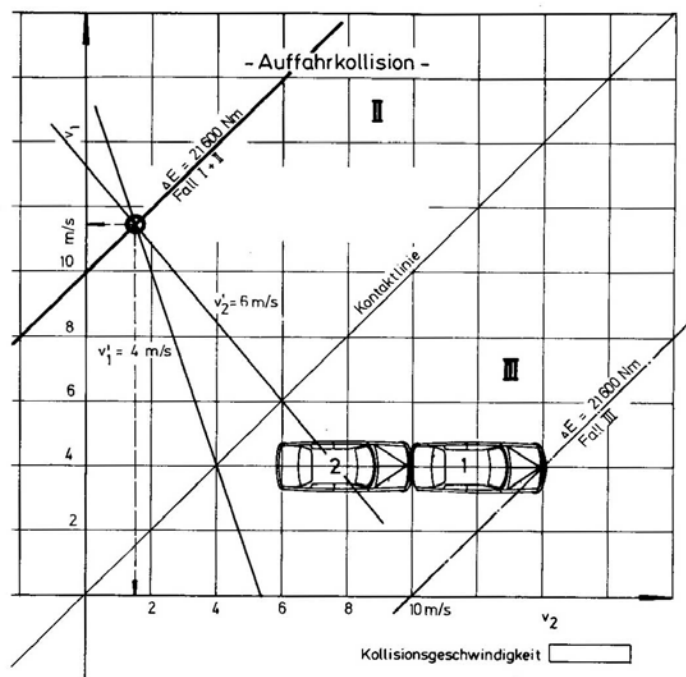


Bild 8 Energiegerade

5 Einfluß der Toleranzen

Im Rahmen der Unfallrekonstruktion kann nicht mit festen Größen gerechnet werden. Die rekonstruierten Größen, Geschwindigkeiten nach dem Stoß und Formänderungsenergie, sind mit Toleranzen zu versehen. Dementsprechend wird auch eine Bandbreite von möglichen Werten für die Kollisionsgeschwindigkeit folgen. Würde man allein den Impuls-Satz in Verbindung mit einer Stoßcharakteristik zur Berechnung der Grundlage machen, so ergeben sich insbesondere bei k -Faktoren, die von 0 nur wenig verschieden sind, große Lösungsfelder (Bild 9). Dies liegt daran, daß die Geraden nach Gleichung 1 und Gleichung 2 ähnlich große Steigungen haben. Für $k = 0$ ist die Steigung gleich. Das Lösungsfeld sollte durch eine Energiebetrachtung eingegrenzt werden. Im betrachteten Beispiel ergibt sich dann das Lösungsfeld, wie es ebenfalls im Bild 9 dargestellt ist. Es wird also bei eindimensionalen Stößen fast immer darauf ankommen, auch die Formänderungsenergie zu berechnen. Zwingend notwendig ist dies bei plastischen Stößen, hier würde sich sonst kein Ergebnis einstellen. Aber auch bei Stößen, deren k -Faktor nur wenig von 0 verschieden ist, erhält man eine akzeptable Eingrenzung des Lösungsfeldes nur, wenn die Formänderungsenergie bekannt ist.

6 Der Stoßfaktor

Prinzipiell läßt sich der Stoßfaktor berechnen, wenn die Geschwindigkeiten der Fahrzeuge nach dem Stoß und die Formänderungsenergie bekannt sind. Der k -Faktor berechnet sich nach folgender Formel:

$$K = \pm \sqrt{\frac{(v_1' - v_2')^2}{\Delta v_0^2 + (v_1' - v_2')^2}} \quad (4)$$

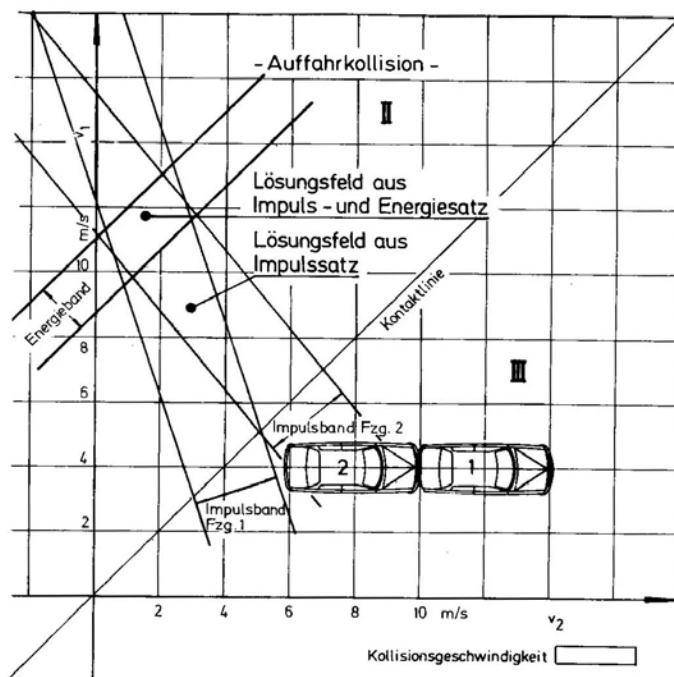


Bild 9 Lösungsfelder

wobei mit Δv_0 die Differenzgeschwindigkeit gemeint ist, die sich aus der Deformationsenergie unter Annahme eines plastischen Stoßes ergibt.

$$\Delta v_0 = \sqrt{\frac{2\Delta E}{m^*}} \quad (5)$$

Welches Vorzeichen die Wurzel erhält, muß jedesmal genau überprüft werden.

Für den Bereich $|k| \leq 0,5$ läßt sich die Gleichung linear annähern und es gilt dann folgende Formel:

$$K \approx \pm \frac{v_2' - v_1'}{\Delta v_0}$$

+ für Fall I, II
- für Fall III

7 Zusammenfassung

Es wurde eine grafische Lösungsmöglichkeit für den eindimensionalen Stoß gezeigt, die es erlaubt, ohne Berechnungen nur mit Hilfe zweier Schablonen ein Ergebnis zu erarbeiten. Es können nicht nur plastische, sondern auch elastische und streifende Stöße behandelt werden.

Literatur

- [1] Schimmelpfennig, Karl-Heinz
Kollisionsgeschwindigkeitsberechnung bei eindimensionalen Fahrzeug/Fahrzeug-Stößen. »Der Verkehrsunfall« Heft 11/1982